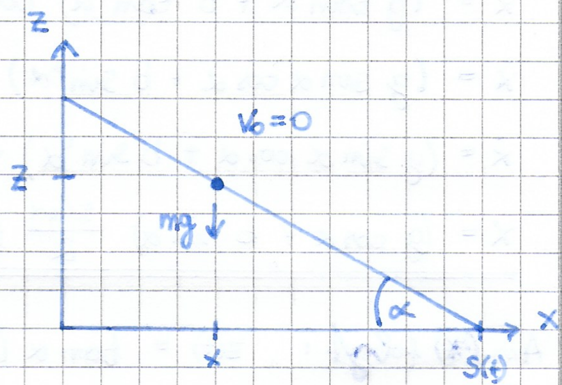
8. Tutorium - Theoretische Mechanik

① Lagrange I. Art



Schiefe Ebene $\alpha = $ const. wird in x-Richtung beschleunigt mit

$$S(t) = \frac{1}{2} b t^2$$

Aus der Skizze wird ersichtlich:

$$\tan\alpha = \frac{z(t)}{S(t) - x(t)}$$

$$\Rightarrow z(t) = \tan\alpha \cdot (S(t) - x(t)) \quad (*)$$

$$\Rightarrow g(x,z,t) = z(t) - \tan\alpha\,(S(t) - x(t)) = 0 \qquad \text{holonom, rheonom}$$

$$= z(t) - \tan\alpha\left(\frac{b}{2}t^2 - x(t)\right) = 0$$

Lagrange Gleichung I. Art:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_j \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0 \qquad \text{mit } q_1 = x,\ q_2 = z$$

Lagrange-Funktion: $L = T - U$

$$U = m \cdot g \cdot z \qquad T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

$$\Rightarrow q_1 = x: \quad -\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \lambda \cdot \tan\alpha = 0$$

$$\underline{-m\ddot{x} + \lambda \cdot \tan\alpha = 0} \quad (1)$$

$$\Rightarrow q_2 = z: \quad -mg - \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + \lambda = 0$$

$$\underline{-mg - m\ddot{z} + \lambda = 0} \quad (2)$$

Bestimmung von λ: Zweimaliges Differenzieren der Zwangsbeding.

$$\dot{g}(x,z,t) = \dot{z}(t) - b\tan\alpha\, t + \tan\alpha\, \dot{x}(t)$$

$$\ddot{g}(x,z,t) = \ddot{z}(t) - b\tan\alpha + \tan\alpha\, \ddot{x}(t) \quad (3)$$

(3) in (2) einsetzen: $\quad (3) \rightarrow \ddot{z}(t) = b\tan\alpha - \tan\alpha\,\ddot{x}(t)$

$$-mg - m(b\tan\alpha - \tan\alpha\,\ddot{x}) + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda = m(g + b\tan\alpha - \tan\alpha\,\ddot{x})} \quad (4)$$

(4) in (1): $\quad -m\ddot{x} + m\tan\alpha\,(g + b\tan\alpha - \tan\alpha\,\ddot{x}) = 0 \quad | : m \neq 0$

$$-\ddot{x}\,(1 - \tan^2\alpha) = -\tan\alpha\,(g + b\tan\alpha)$$

$$\underline{\ddot{x} = \frac{\tan\alpha\, g + \tan^2\alpha\, b}{1 - \tan^2\alpha}}$$

mit $\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ folgt:

$$\ddot{x} = (g \tan\alpha + b \tan^2\alpha) \cos^2\alpha$$

$$\ddot{x} = (g \sin\alpha \cos\alpha + b \sin^2\alpha) \quad \Big| \int \dots dt$$

$$\dot{x} = (g \sin\alpha \cos\alpha + b \sin^2\alpha)\, t + \underbrace{v_0}_{=0\,*} \quad \Big| \int \dots dt \qquad * \text{ Anfangsbed.}$$

$$\underline{\underline{x = (g \cos\alpha + b \sin\alpha) \frac{\sin\alpha}{2} t^2 + x_0}}$$

Aus (*) folgt: $z(t) = \tan\alpha\,(s(t) - x(t))$

$$\Rightarrow \underline{\underline{z(t) = \tan\alpha \left(\frac{b}{2} t^2 - \frac{\sin\alpha}{2} (g \cos\alpha + b \sin\alpha)\, t^2 + x_0 \right)}}$$

<u>Aufstellen der Zwangskräfte:</u>

$$\vec{F}_Z = \lambda \cdot \operatorname{grad}(g(x,z))$$

$$= m(g + b \tan\alpha - \tan\alpha\, \ddot{x}) \cdot \operatorname{grad}(g(x,z))$$

$$= m(g + b \tan\alpha - \tan\alpha\, \ddot{x}) \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= m(g + b \tan\alpha - \tan\alpha \cos^2\alpha\, [g \tan\alpha + b \tan^2\alpha]) \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{m(g \cos^2\alpha - b \sin\alpha) \begin{pmatrix} \tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix}}}$$